

5.9 Abbildungsräume

Definition: Für je zwei K -Vektorräume V und W setzen wir

$$\text{Hom}_K(V, W) := \{h: V \rightarrow W \mid h \text{ } K\text{-linear}\}.$$

Proposition: Dies ist ein Untervektorraum des Raums W^V aller Abbildungen $V \rightarrow W$.

Bew.: Nullabbildung $\in \text{Hom}_K(V, W)$.

Seien $h, h' \in \text{Hom}_K(V, W)$. Dann: $\forall v, v' \in V: (h+h')(v+v') = h(v+v') + h'(v+v')$
 $= h(v) + h(v') + h'(v) + h'(v')$
 $= (h+h')(v) + (h+h')(v')$
 Analog für alle $\lambda \in K$. $(h+h')(\lambda v) = h(\lambda v) + h'(\lambda v) = \lambda h(v) + \lambda h'(v) = \lambda(h+h')(v)$
 Also ist $h+h' \in \text{Hom}_K(V, W)$.

Analytisch:
 $f \cdot h$ linear
 als in
 $\text{Hom}_K(V, W)$
 qed.

Proposition: Für je zwei lineare Abbildungen $f: V' \rightarrow V$ und $g: W \rightarrow W'$ ist die Abbildung

$$C_{g,f}: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(V', W'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f$$

wohldefiniert und linear. Sind f und g Isomorphismen, so auch $C_{g,f}$.

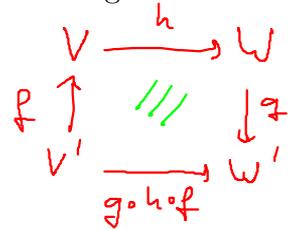
Bew.: $\forall h, h' \in \text{Hom}_K(V, W)$: zu zeigen: $C_{g,f}(h+h') = C_{g,f}(h) + C_{g,f}(h')$

$$\forall \lambda \in K$$

$$C_{g,f}(\lambda h) = \lambda C_{g,f}(h) \quad \leftarrow \text{analog}$$

$$\begin{aligned} \text{Aber } \forall v' \in V': C_{g,f}(h+h')(v') &= (g \circ (h+h') \circ f)(v') = g((h+h')(f(v'))) \\ &= g(h(f(v')) + h'(f(v'))) = g(h(f(v'))) + g(h'(f(v'))) \\ &= (g \circ h \circ f)(v') + (g \circ h' \circ f)(v') = C_{g,f}(h)(v') + C_{g,f}(h')(v') \end{aligned}$$

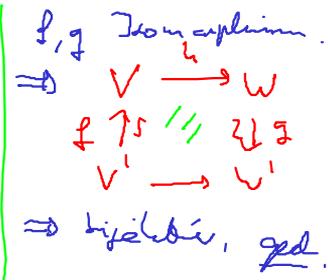
$\Rightarrow C_{g,f}$ linear.



Proposition: Die folgende Abbildung ist ein Isomorphismus von K -Vektorräumen:

$$\text{Mat}_{m \times n}(K) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(K^n, K^m), A \mapsto L_A.$$

Bew.: Wirken schon: Die ist bijektiv, zu zeigen: ist linear.
 $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ } \Rightarrow zu zeigen: $L(\lambda A) = \lambda \cdot L_A$ 'rest analog', $\lambda \cdot L_A(v) = \lambda \cdot (Av)$
 $\lambda \in K$ } \Rightarrow zu zeigen: $L(\lambda A) = \lambda \cdot L_A$ 'rest analog', $\lambda \cdot L_A(v) = \lambda \cdot (Av)$



Proposition: Für jede geordnete Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V und jede geordnete Basis $B' = (w_1, \dots, w_m)$ von W ist die folgende Abbildung ein Isomorphismus:

$$\text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(K), f \mapsto {}_{B'}[f]_B.$$

Bew.: Einigung: $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ für ${}_{B'}[f]_B = (a_{ij})_{i,j}$
 analog $g(v_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} w_i$ für ${}_{B'}[g]_B = (b_{ij})_{i,j}$
 $\Rightarrow (f+g)(v_j) = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) w_i$
 $\Rightarrow {}_{B'}[f+g]_B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$
 $= {}_{B'}[f]_B + {}_{B'}[g]_B$

Satz: Für je zwei endlichdimensionale K -Vektorräume V und W gilt

$$\dim_K \text{Hom}_K(V, W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W).$$

Analog ${}_{B'}[\lambda f]_B = \lambda \cdot {}_{B'}[f]_B$
 $\Rightarrow f \mapsto {}_{B'}[f]_B$ linear.
 Bijektiv \Rightarrow Isom. ged.

Bew.: $\dim_K \text{Hom}_K(V, W) = \dim_K \text{Mat}_{m \times n}(K) = m \cdot n$

$m = \dim W$
 $n = \dim V$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{i,j}$$

Basis $\{E_{ij} \mid i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\}$.

ged.

Definition: Für jeden K -Vektorraum V setzen wir

$$\text{End}_K(V) := \text{Hom}_K(V, V).$$

Proposition: Mit der Addition und Komposition von Endomorphismen sowie der Nullabbildung und der identischen Abbildung ist $(\text{End}_K(V), +, \circ, 0_V, \text{id}_V)$ ein Ring, genannt der *Endomorphismenring von V* . Im Fall $\dim_K(V) > 1$ ist dieser nicht kommutativ.

$$k \circ (h + h') = k \circ h + k \circ h'$$

$$\text{Bsp.} \quad \text{End}_K(K^n) \cong \text{Mat}_{n \times n}(K).$$

5.10 Dualraum

Definition: Der Vektorraum

$$V^\vee := \text{Hom}_K(V, K)$$

spricht: "V dual"

heisst der Dualraum von V , und seine Elemente heissen Linearformen auf V .

Proposition-Definition: Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis eines K -Vektorraums V . Für jedes $1 \leq i \leq n$ sei $\ell_i \in V^\vee$ die lineare Abbildung

$$\ell_i: V \longrightarrow K, \quad \sum_{j=1}^n x_j v_j \mapsto x_i.$$

Dann ist $B^\vee := (\ell_1, \dots, \ell_n)$ eine geordnete Basis von V^\vee , genannt die duale Basis zu B .

Bew.: ℓ_i ist linear:
$$\left[\begin{array}{l} v = \sum_j x_j v_j \\ w = \sum_j y_j v_j \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v+w = \sum_j (x_j+y_j) v_j \\ \Rightarrow \ell_i(v+w) = x_i+y_i = \ell_i(v) + \ell_i(w) \\ \text{Analog } \ell_i(\lambda v) = \lambda \ell_i(v). \end{array} \right\}$$

Zu zeigen: $\forall \ell \in V^\vee: \exists! \lambda_i \in K; \ell = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i$.

wähl ich mit $\lambda_j = \ell(v_j)$.

$$\Leftrightarrow \forall v \in V; \ell(v) = \sum_i \lambda_i \ell_i(v)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_n \in K; \ell\left(\sum_j x_j v_j\right) = \sum_i \lambda_i \ell_i\left(\sum_j x_j v_j\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_n \in K; \sum_j x_j \ell(v_j) = \sum_i \lambda_i \ell_i(v_j)$$

$$\Leftrightarrow \forall j: \ell(v_j) = \lambda_j$$

qed.

Satz: Für jeden K -Vektorraum V gilt

$$\dim_K(V^\vee) = \begin{cases} \dim_K(V) & \text{falls } \dim_K(V) < \infty, \\ \infty & \text{falls } \dim_K(V) = \infty. \end{cases}$$

Bew.: $\dim_K(V) < \infty \Rightarrow$ siehe oben.

$\dim_K(V) = \infty$, sei B eine Basis von V ;

für jedes $b \in B$ setze $l_b: V \rightarrow K$, $\sum_{b' \in B} x_{b'} b' \mapsto x_b$

Dann sind die l_b lin. unabh.

ged.

Beispiel: Für jede Menge I sei wie früher K^I der Raum aller Abbildungen $I \rightarrow K$ und $K^{(I)}$ der Unterraum aller Abbildungen mit endlichem Träger. Dann ist der Dualraum $(K^{(I)})^\vee$ natürlich isomorph zu K^I . Insbesondere ist $\dim(V^\vee) > \dim(V)$ im Sinne unendlicher Kardinalzahlen, wenn $\dim(V) = \infty$ ist.

$$\begin{array}{ccc} K^I & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_K(K^{(I)}, K) \\ & \xleftarrow{\sim} & \\ (y_i)_{i \in I} & \longleftrightarrow & ((x_i)_i \mapsto \sum_i x_i y_i) \end{array}$$

wahldefinit.

$$(l(e_i))_i \longleftarrow l$$

$$e_i = (\delta_{ij})_j$$

$$\dim K^{(I)} = |I|.$$

$$\uparrow$$

$$\dim K^I$$

Proposition: (a) Für jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist die Abbildung

$$f^\vee: W^\vee \rightarrow V^\vee, \ell \mapsto \ell \circ f$$

Spiegel "f dual"

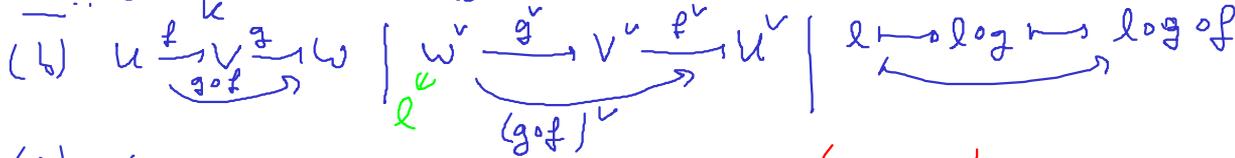
wohldefiniert und linear. Sie heisst die **duale Abbildung zu f**.

(b) Für je zwei lineare Abbildungen $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$ gilt $(g \circ f)^\vee = f^\vee \circ g^\vee$.

(c) Die duale Abbildung der identischen Abbildung ist $\text{id}_V^\vee = \text{id}_{V^\vee}$.

(d) Für jeden Isomorphismus $f: V \rightarrow W$ ist $f^\vee: W^\vee \rightarrow V^\vee$ ein Isomorphismus.

Bew. (a) $\text{Hom}_K(W, K) \rightarrow \text{Hom}_K(V, K), \ell \mapsto \ell \circ f$. linear nach §5.9.



(c) ✓ (d) §5.9.

(w_1, \dots, w_m)

ged.

Proposition: Seien B eine geordnete Basis von V und B' eine geordnete Basis von W , und sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$B^\vee[f^\vee]_{B^\vee} = B'[f]_{B'}^T$$

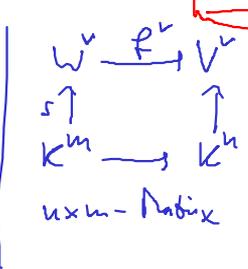
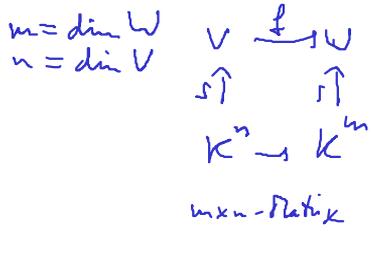
Beweis: $A = (a_{ij}) = B'[f]_{B'}$

Dann $f(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$

Sei (ℓ_1, \dots, ℓ_m) die duale Basis zu B' .

Sei $(k_1, \dots, k_n) \dots \dots \dots B^\vee$

zu zeigen: $f^\vee(k_j) = \sum_i a_{ij} \ell_i$



Rest später