5.9 Abbildungsräume

Definition: Für je zwei K-Vektorräume V und W setzen wir

$$\boxed{\mathrm{Hom}_K(V,W) \;:=\; \{h\colon V \to W \mid h \;K\text{-linear}\}.}$$

Proposition: Dies ist ein Untervektorraum des Raums W^V aller Abbildungen $V \to W$.

Bew.: Nullabbildung $\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

Seien $h, h' \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Dann: $\forall v,v' \in V$: $(h+h')(v+v') = h(v+v') + h'(v+v')$
$= h(v) + h(v') + h'(v) + h'(v')$
$= (h+h')(v) + (h+h')(v')$

Analog für alle $\lambda \in K$. $(h+h')(\lambda v) = h(\lambda v) + h'(\lambda v)$
$= \lambda \cdot h(v) + \lambda \cdot h'(v) = \lambda (h+h')(v)$

Also ist $h+h' \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

Analog $\forall \mu \in K$: $\mu \cdot h$ linear also in $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ qed.

Proposition: Für je zwei lineare Abbildungen $f\colon V' \to V$ und $g\colon W \to W'$ ist die Abbildung

$$C_{g,f}\colon\; \mathrm{Hom}_K(V,W) \to \mathrm{Hom}_K(V',W'),\;\; h \mapsto g \circ h \circ f$$

wohldefiniert und linear. Sind f und g Isomorphismen, so auch $C_{g,f}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[dr, phantom, "///"] & W \arrow[d, "g"] \\ V' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g\circ h\circ f"'] & W' \end{tikzcd}$$

Bew.: $\forall h, h' \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$: Zu zeigen: $C_{g,f}(h+h') = C_{g,f}(h) + C_{g,f}(h')$

$\forall \lambda \in K$ $\quad C_{g,f}(\lambda h) = \lambda\, C_{g,f}(h)$. analog.

Aber $\forall v' \in V'$: $C_{g,f}(h+h')(v') = (g \circ (h+h') \circ f)(v') = g\big((h+h')(f(v'))\big)$
$= g\big(h(f(v')) + h'(f(v'))\big) = g(h(f(v'))) + g(h'(f(v')))$
$= (g \circ h \circ f)(v') + (g \circ h' \circ f)(v') = C_{g,f}(h)(v') + C_{g,f}(h')(v')$

$\Rightarrow C_{g,f}$ linear.

Proposition: Die folgende Abbildung ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen:

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m),\ A \mapsto L_A.$$

Bew.: Wissen schon: Dies ist bijektiv. Zu zeigen: ist linear.

$\left.\begin{array}{l} A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \\ \lambda \in K \end{array}\right\} \Rightarrow$ Zu zeigen: $L_{\lambda A} = \lambda \cdot L_A$. Rest analog.

Aber: $\forall v \in K^n$: $L_{\lambda A}(v) = (\lambda A)\cdot v$

$\lambda \cdot L_A(v) = \lambda \cdot (Av)$

f, g Isomorphismen.

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & W \\ f \uparrow s & /\!/\!/ & \wr\!\!\downarrow g \\ V' & \longrightarrow & W' \end{array}$$

$\Rightarrow$ bijektiv, qed.

Proposition: Für jede geordnete Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von V und jede geordnete Basis $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ von W ist die folgende Abbildung ein Isomorphismus:

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(K),\ f \mapsto {}_{B'}[f]_B.$$

Bew.: Erinnerung: $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ für ${}_{B'}[f]_B = (a_{ij})_{i,j}$

analog $g(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$ für ${}_{B'}[g]_B = (b_{ij})_{i,j}$

$\Rightarrow (f+g)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij}+b_{ij}) w_i$

$\Rightarrow {}_{B'}[f+g]_B = (a_{ij}+b_{ij})_{i,j}$

$= {}_{B'}[f]_B + {}_{B'}[g]_B$.

Analog ${}_{B'}[\lambda f]_B = \lambda \cdot {}_{B'}[f]_B$.

$\Rightarrow f \mapsto {}_{B'}[f]_B$ linear.

Bijektiv $\Rightarrow$ Isom. qed

Satz: Für je zwei endlichdimensionale K-Vektorräume V und W gilt

$$\boxed{\dim_K \mathrm{Hom}_K(V, W) \;=\; \dim_K(V) \cdot \dim_K(W).}$$

Bew.: $\dim_K \mathrm{Hom}_K(V,W) = \dim_K \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) = m \cdot n$

$m = \dim W$
$n = \dim V$.

Basis $\{E_{ij} \mid i = 1..m,\ j = 1..n\}$.

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow j \end{array}$$

qed.

Definition: Für jeden K-Vektorraum V setzen wir

$$\operatorname{End}_K(V) \;:=\; \operatorname{Hom}_K(V, V).$$

Proposition: Mit der Addition und Komposition von Endomorphismen sowie der Nullabbildung und der identischen Abbildung ist $(\operatorname{End}_K(V), +, \circ, 0_V, \mathrm{id}_V)$ ein Ring, genannt der *Endomorphismenring von V*. Im Fall $\dim_K(V) > 1$ ist dieser nicht kommutativ.

$k \circ (h + h') = k \circ h + k \circ h'$

Bsp.: $\operatorname{End}_K(K^n) \cong \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$.

5.10 Dualraum

Definition: Der Vektorraum

$$V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K)$$ Sprich: "V dual"

heisst der *Dualraum von V*, und seine Elemente heissen *Linearformen auf V*.

Proposition-Definition: Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis eines K-Vektorraums V. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ sei $\ell_i \in V^\vee$ die lineare Abbildung

$$\ell_i\colon\ V \longrightarrow K,\quad \textstyle\sum_{j=1}^n x_j v_j \mapsto x_i.$$

Dann ist $B^\vee := (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ eine geordnete Basis von $V^\vee$, genannt die *duale Basis zu B*.

Bew.: ℓ_i ist linear: $\left[\begin{matrix} v = \sum_j x_j v_j \\ w = \sum_j y_j v_j \end{matrix}\right\} \Rightarrow v+w = \sum_j (x_j + y_j) v_j \Rightarrow \ell_i(v+w) = x_i + y_i = \ell_i(v) + \ell_i(w)$. Analog $\ell_i(\lambda v) = \lambda \ell_i(v)$. $\Big]$

Zu zeigen: $\forall \ell \in V^\vee \colon \exists!\, \lambda_i \in K\colon \ell = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i$.

nämlich mit $\lambda_j = \ell(v_j)$.

$\Longleftrightarrow \forall v \in V\colon \ell(v) = \sum_i \lambda_i \ell_i(v)$

$\Longleftrightarrow \forall x_1, \ldots, x_n \in K\colon \ell\big(\sum_j x_j v_j\big) = \sum_i \lambda_i \ell_i\big(\sum_j x_j v_j\big)$

$\Longleftrightarrow \forall x_1, \ldots, x_n \in K\colon \sum_j x_j \ell(v_j) = \sum_i \lambda_i x_i$.

$\Longleftrightarrow \forall j\colon \ell(v_j) = \lambda_j$ ✝ qed.

Satz: Für jeden K-Vektorraum V gilt

$$\dim_K(V^\vee) = \begin{cases} \dim_K(V) & \text{falls } \dim_K(V) < \infty, \\ \infty & \text{falls } \dim_K(V) = \infty. \end{cases}$$

Bew.: $\dim_K(V) < \infty \Rightarrow$ siehe oben.

$\dim_K(V) = \infty$, sei B eine Basis von V;

für jedes $b \in B$ setze $\ell_b : V \to K$, $\sum_{b' \in B} x_{b'} b' \mapsto x_b$

Dann sind die ℓ_b lin. unabh.

q.e.d.

Beispiel: Für jede Menge I sei wie früher K^I der Raum aller Abbildungen $I \to K$ und $K^{(I)}$ der Unterraum aller Abbildungen mit endlichem Träger. Dann ist der Dualraum $(K^{(I)})^\vee$ natürlich isomorph zu K^I. Insbesondere ist $\dim(V^\vee) > \dim(V)$ im Sinne unendlicher Kardinalzahlen, wenn $\dim(V) = \infty$ ist.

$$K^I \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_K(K^{(I)}, K)$$

$$(y_i)_{i \in I} \longmapsto \Big((x_i)_i \longmapsto \sum_i{}' x_i y_i \Big)$$

wohldefiniert.

$$(\ell(e_i))_i \longleftarrow\!\!\shortmid \ \ell$$

$$e_i = (\delta_{ij})_j$$

$$\dim K^{(I)} = |I|.$$

$$\wedge$$

$$\dim K^I$$

Proposition: (a) Für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist die Abbildung

$$f^\vee\colon W^\vee \to V^\vee,\ \ell \mapsto \ell \circ f$$

Sprich "f dual".

wohldefiniert und linear. Sie heisst die *duale Abbildung zu f.*

(b) Für je zwei lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ gilt $(g \circ f)^\vee = f^\vee \circ g^\vee$.

(c) Die duale Abbildung der identischen Abbildung ist $\mathrm{id}_V^\vee = \mathrm{id}_{V^\vee}$.

(d) Für jeden Isomorphismus $f\colon V \to W$ ist $f^\vee\colon W^\vee \to V^\vee$ ein Isomorphismus.

Bew.: (a) $\mathrm{Hom}_K(W,K) \to \mathrm{Hom}_K(V,K)$, $\ell \mapsto \ell \circ f$. linear nach §5.9.

(b) $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$, $g \circ f$ | $W^\vee \xrightarrow{g^\vee} V^\vee \xrightarrow{f^\vee} U^\vee$, $(g \circ f)^\vee$, ℓ | $\ell \mapsto \ell \circ g \mapsto \ell \circ g \circ f$

(c) ✓ (d) §5.9.

qed.

Proposition: Seien B eine geordnete Basis von V und B' = $(w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von W, und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\boxed{{}_{B^\vee}[f^\vee]_{B'^\vee} = {}_{B'}[f]_B^T.}$$

$m = \dim W$
$n = \dim V$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \uparrow\wr & & \uparrow\wr \\ K^n & \longrightarrow & K^m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W^\vee & \xrightarrow{f^\vee} & V^\vee \\ \uparrow\wr & & \uparrow \\ K^m & \longrightarrow & K^n \end{array}$$

$m \times n$-Matrix | $n \times m$-Matrix

Beweis: $A = (a_{ij}) = {}_{B'}[f]_B$.

Dann $\boxed{f(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i.}$

Sei $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ die duale Basis zu B.

Sei $(k_1, \ldots, k_m)$ — — — — B'.

Zu zeigen: $\boxed{f^\vee(k_i) = \sum_j a_{ij} \ell_j.}$

Rest später